

② MNOŽINY

1. Základní množinové pojmy

MNOŽINA - souhrn nějakých předmětů (objektů), které mají nějaké PRVKY MNOŽINY

- prv. množin A, B, C (někdy $a, b, c, \dots$, příp. $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \dots$)

prvků množin a, b, c

- o každém objektu lze jednoznačně rozhodnout, zda patří či nepatří do určité množiny

- prvek a patří (náleží) do prv. A $a \in A$

(a je prv. A , a je elementem prv. A)

- prvek b nepatří (naneleží) do prv. A $b \notin A$

URČENÍ MNOŽINY

- VŮČTEM VŠECH PRVKŮ (pro u končiny množin, naneleží na pořadí, každý prvek píše jen jednou)

(u) $A = \{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, a, b\} = \dots$

$B = \{\text{lidé}, \text{živočiš}, \text{věci}\}$

$C = \{1; \frac{1}{2}; 0,5\} \rightarrow \text{CHYBNÉ} \Rightarrow C = \{1, \frac{1}{2}\}$ nebo $C = \{1; 0,5\}$ SPRÁVNÉ

- CHARAKTERISTICKOU VLASTNOST

- určení jaké vlastnosti, kterou mají právě jen prvky dané množiny

- kvantifikace určení vlastnosti u prvků v prv. ZÁKLADNÍ (UNIVERZÁLNÍ) MNOŽINĚ U (přp. $\mathbb{U}$), která obsahuje všechny prvky, které mohou nastat v dané situaci (bývalý předmět učiva)

$A = \{x \in U; V(x)\}$

A je prv. všech prvků x z prv. U , pro které platí (kteří mají) vlastnost $V(x)$

(u) $B = \{x \in \mathbb{N}; x < 6\}$

některým $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

B je prv. všech přv. čísel, pro které platí, že jsou menší než 6 (kteří mají - B je prv. všech přv. čísel menších než 6)

[Někdy místo slovních dvojic nebo trojic $A = \{x \in U; V(x)\}$, $A = \{x \in U | V(x)\}$]

PRÁZDNÁ MNOŽINA - prv., která neobsahuje žádný prvek

- ozn. $\emptyset$ příp. $\{\}$

(u) $A = \{x \in \mathbb{N}; x < 1\} = \emptyset$

[ROZUŠUJ!
 $\{0\}$... prv. obs. 1 prvek - číslo 0
 $\{\emptyset\}$ chybné $\Rightarrow$ správně bez nároku $\emptyset$]

NEPRÁZDNÁ MNOŽINA - prv. obsahující alespoň jeden prvek (tj. jeden nebo více)

MNOŽINY PODLE POČTU PRVKŮ

- KONEČNÉ: mají konečný počet prvků, POČET PRVKŮ prv. $|A|$ (někdy $m(A)$)

(u) $A = \{x \in \mathbb{N}; 1 < x < 5\} = \{2, 3, 4\}$ $|A| = 3$

$B = \{x \in \mathbb{N}; x < 0\} = \emptyset$

$|B| = 0$

- NEKONEČNÉ: všechny prv., které nejsou konečné

(u) $C = \{x \in \mathbb{N}; x \geq 3\} = \{3, 4, 5, \dots\}$ NEKONEČNÁ

$D = \{x \in \mathbb{R}; 1 \leq x < 2\} = [1, 2)$



NEKONEČNÁ

Příklady

① Zapište množinu všech prvků

a) $A = \{x \in \mathbb{N}; |x| \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kl. přív. č., kl. mají mod. od 0 menší nebo rovnou 5

b) $B = \{x \in \mathbb{Z}; |x| \leq 5\} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ obd., ale celá čísla

c) $C = \{x \in \mathbb{R}; |x| = 0\} = \{0\}$ kl. reáln. č., jedině mod. od 0 je 0

d) $D = \{x \in \mathbb{N}; |x| < 1\} = \emptyset$ kl. přív. č., jedině mod. od 0 je menší než 1

② Zapište charakteristickou vlastnost

a) $A = \{3, 4, 5, 6\} = \{x \in \mathbb{N}; 3 \leq x \leq 6\} = \{x \in \mathbb{Z}; 2 < x < 7\}$ apod.
 $= \{x \in \mathbb{Z}; 3 \leq x \leq 6\}$

b) $B = \{-3, 3\}$
 $B = \{x \in \mathbb{R}; |x| = 3\}$

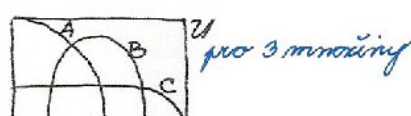
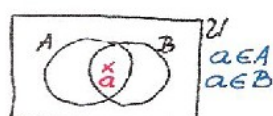
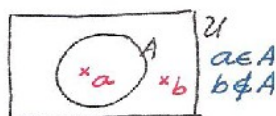
c) $C = \{0\}$
 $C = \{x \in \mathbb{R}; |x| = 0\}$

d) $D = \emptyset$
 $D = \{x \in \mathbb{R}; |x| < 0\}$

GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ - VENNOVY DIAGRAMY

- vyvíjíme pro lepší přehlednost a náhodnost (množky náhl. mn. v multisém)

- např.



2. Množinové relace a operace

- PODMNOŽINA (INKLUZE MNOŽIN - vlastnost třídy podmnožin - částí)

Def. Množina B je PODMNOŽINOU množiny A právě tehdy, když každý prvek množiny B je zároveň prvkem množiny A



$B \subset A \Leftrightarrow x \in B \Rightarrow x \in A$
 (jistě i pak)

- VLASTNOSTI:

1. každá množina je podmnožinou sebe sama
 $A \subset A$ ($\emptyset \subset \emptyset$)

2. prázdná množina je podmnožinou každé množiny
 $\emptyset \subset A$ ($\emptyset \subset \emptyset$)

ROZLIŠUJTE!

BÝT PRVKEM MNOŽINY a BÝT PODMNOŽINOU

$1 \in \{1, 2, 3\}$

Číslo 1 patří do mn.
obsahující čísla 1, 2, 3

$\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$

Množina obsahující číslo 1 je podmnožinou
množiny obsahující čísla 1, 2, 3

pl. Zapište všechny podmnožiny množiny $\{1, 2, 3\}$

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ - je jich 8

(př.)



! POČET PODMNOŽIN m prvkové množiny je

- 3 prvky: $2^3 = 8$
 - 2 prvky: $2^2 = 4$

- 4 prvky: $2^4 = 16$

Příklady

① Zapište všechny podmnožiny množiny

a) $A = \{x \in \mathbb{Z}; -2 < x < 2\} = \{-1, 0, 1\}$

$$\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}$$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}; |x| = 4\} = \{-4, 4\}$

$$\emptyset, \{-4\}, \{4\}, \{-4, 4\}$$

c) $C = \{x \in \mathbb{R}; \forall x^2 = 0\} = \{0\}$

$$\emptyset, \{0\}$$

d) $D = \{x \in \mathbb{N}; \forall x^2 = 0\} = \emptyset$

$$\emptyset$$

POZNÁMKA

- n množin libovolně rozložen

INKLUZE B je podmnožina A $B \subseteq A$ (příp. $B \subset A$)

OSTRÁ INKLUZE B je vlastní podmnožina A $B \subset A$ [$B \neq A$] (příp. $B \subsetneq A$)

ROVNOST MNOŽIN

Def. Množiny A a B se ROVNÁJÍ (množ. $A=B$) právě tehdy, když každý prvek množ. A je prvkem množ. B a zároveň každý prvek množ. B je prvkem množ. A

[tj. množ. A je podmnožinou množ. B a naopak B je podmnožinou množ. A]

$$A=B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

$$[A=B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A]$$

(př.)

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \quad B = \{x \in \mathbb{N}; \underline{2|x} \wedge x \leq 8\} = \{2, 4, 6, 8\} \quad A=B$$

$\underline{2}$ dělí x (x je dělitelné $\underline{2}$)

Příklady

② Ukaž, které z následujících množin se rovnají

a) $A = \{x \in \mathbb{N}; x < 0\} = \emptyset$

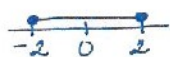
$$B = \{0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$$



$$D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 2\} \quad \forall x: |x| \leq 2 \quad x_0=0$$



$$E = [-2, 2]$$

$$F = \emptyset$$

$$G = \{x \in \mathbb{Z}; -3 < x < 3\} \quad \text{ne } \mathbb{Z}: \quad \frac{-2}{-2} \frac{-1}{-1} \frac{0}{0} \frac{1}{1} \frac{2}{2}$$

$$G = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 0\} = \{0\}$$



$$\text{závěr: } A=F \quad B=H \quad C=E \quad D=G$$

$$b) A = \{x \in \mathbb{Z}; x > 0\} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 0\} = \{0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N}; |x-2| < 2\} = \{1, 2, 3\}$$

$|x-2| < 2$
 $x_0 = 2$ kl. přír. a^+ , kl. mají od čísla $x_0 = 2$ mal. 2

$$D = \mathbb{N}$$

$$E = \{0\}$$

$$F = \{1, 2, 3\}$$

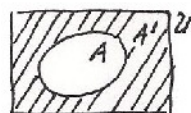
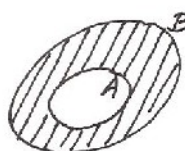
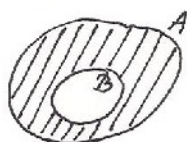
$$A = D \quad B = E \quad C = F$$

- DOPLNĚK MNOŽINY

DOPLNĚK MNOŽINY B v množině A (kn. B'_A) je množina všech prvků množiny A , které nepatří do množiny B

$$B'_A = \{x \in A; x \notin B\}$$

$$\text{podobně: } A'_B = \{x \in B; x \notin A\}$$



- doplněk mnv. A v ZÁKLADNÍ MNOŽINĚ U

- pokud $U = \mathbb{R}$ (mnv. reál. čísel) nebo je jasně o jakou mnv. u jedné - knv. A'

$$A' = \{x \in U; x \notin A\}$$

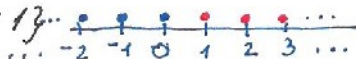
pr. $U = \mathbb{R}, A = \langle 3, 4 \rangle$ $A' = (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$ [množiny $\langle 3, 4 \rangle_{\mathbb{R}}$ sjednocení]

pr. $B = (-\infty, 2) \cup (9, +\infty)$ $B' = \langle 2, 9 \rangle$

příklady

③ Uvěřte doplněk množiny v množině celých čísel $\mathbb{Z}$

$$A = \{x \in \mathbb{Z}; x < 1\}$$



$$A' = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq 1\} = \mathbb{N}$$

$$B = \mathbb{N}$$

$$B' = \{x \in \mathbb{Z}; x \notin \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{Z}; x \leq 0\} = \mathbb{Z}_0^-$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z}; \sqrt{x^2} = |x|\} = \mathbb{Z}$$

$$C' = \{x \in \mathbb{Z}; x \notin \mathbb{Z}\} = \emptyset$$

CELÁ NEKLADNÁ

$$D = \{x \in \mathbb{Z}; |x| > 0\} = \{x \in \mathbb{Z}; x \neq 0\}$$

všichni kromě 0

$$D' = \{0\}$$

④ Uvěřte doplněk mnv. B v množině A

a) $A = \{-2; -0,5; 0; 1; 3\}$

$$B = \{-0,5; 0; 3\}$$

$$B'_A = \{x \in A; x \notin B\} = \{-2; 1\}$$

b) $A = \mathbb{Z}$

$$B = \{x \in \mathbb{Z}; x \leq 0\}$$

$$B'_A = \{x \in A; x \notin B\} = \{x \in \mathbb{Z}; x > 0\} = \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$$

CELÁ Kladná (PŘIROZENÁ)

c) $A = \{x \in \mathbb{Z}; x > 5\} = \{6, 7, 8, 9, \dots\}$

$$B = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq 7\} = \{7, 8, 9, \dots\}$$

$$B'_A = \{x \in A; x \notin B\} = \{6\}$$

číslo je větší než 5
 $6 \leq 7$ ne